

分析充满粘性液体的二维文杜里毛细管道中 长气泡分裂的边界元方法*

卢文强

高 智

陈绪明

(中国科学院研究生院力学教研室,北京) (中国科学院力学研究所,北京) (航天部第二研究院计算站,北京)

关键词 边界元、气泡分裂、两相流、非定常自由面

近年来,由于石油强化回收技术的发展,人们发现泡沫在油层中产生,能大大增加出油率.已有的研究指出泡沫产生的一个重要机理是油层多孔介质中气泡的分裂(snap-off).

油层中气泡分裂是一个复杂的非定常气液两相自由面问题.本文在文献[2,3]工作的基础上,发展了一个二维的 ω - ϕ 非定常边界元方法,对于液膜起重要作用的区域,我们的结果还是可跟实验比较的.

一、基本方程

油层中气泡的输运过程属于低雷诺数流动,它的描述方程是不可压 Stokes 方程,从不可压 Stokes 方程与连续性方程出发,可得下述二维的涡-流函数(ω - ϕ)方程(无量纲):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla^2 \omega, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = \omega, \quad (2)$$

其中 $\omega = -\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \times (ui + vj)$,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

U 为气泡速度, R_f 为管道半宽度. 长度用 R_f , 速度用 U , 角速度用 U/R_f , 时间用 R_f^2/ν 无量纲化.

边界条件 不可压长气泡以恒速度 U 在粘性静止液体中朝前运动, 将坐标系建立在气泡前缘点上, 如图 1 所示.

上游 S_1 流动为 Poiseuille Flow:

$$\omega = 3f_\infty y; \quad \phi = \frac{3}{2} f_\infty \left(y - \frac{y^3}{3} \right) - y.$$

下游 S_2 流动为 Slug Flow: $\omega = 0$, $\phi = f_\infty - y$,

对称轴 S_3 上: $\phi = 0$, $\omega = 0$,

壁面 S_w 上: $y_w = 1 - \left(\frac{1-y_0}{2} \right) \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi}{8} (x-t) \right] \right\}$,¹¹

本文 1987 年 12 月 12 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目

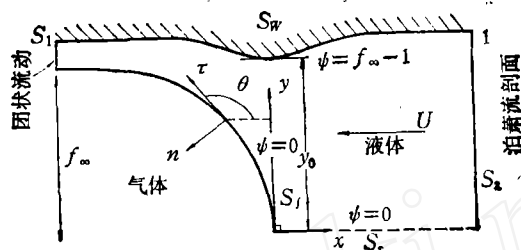


图1 $t=0$ 时刻长气泡分裂问题的示意图

气液交面 S_f 上^[2,3]:

$$\begin{aligned} \phi' &= -1/\cos\theta_w, \quad \psi = f_\infty - 1, \\ \omega &= -2K\phi_n, \quad \psi = 0, \\ \frac{1}{C_a} K_\tau &= -\omega_n - K\omega + 2\phi_{nn}, \end{aligned} \quad (3)$$

K 为自由面曲率, $C_a = U\mu/\sigma$, 下标 τ 表沿自由面切向导数, 下标 n 表沿自由面法向导数, 下标 s 表沿自由面弧向导数.

二、Green 函数、积分方程组及其离散化

方程(1)的基本解, 即 Green 函数 G_1 是^[4]

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4\pi(t-t')} \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-t')}\right], \\ r^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = |q_j - p_i|^2, \\ p_i &= p_i(x_i, y_i), \\ q_j &= q_j(x_j, y_j). \end{aligned}$$

用 Green 第 2 公式得到

$$\alpha_i(p_i)\omega(p_i, t) = \int_{\Sigma} \left[\omega_0 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \right] d\Gamma + \int_{t_0}^t dt' \int_{\Sigma} \left[G_1 \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] d\Gamma, \quad (4)$$

其中 Σ 是区域 Ω 的边界

$$\alpha_i(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{当 } p_i \in \Omega, \\ \frac{1}{2} & \text{当 } p_i \in \Sigma, \\ 0 & \text{当 } p_i \notin \Omega(-\Omega + \Sigma), \end{cases}$$

$\omega_0 = \omega|_{t'=t_0}$, 且是调谐的, G_2 是 $\nabla^2 G_2 = G_1(t' = t_0)$ 的 Green 函数^[4], $G_2 = -\frac{1}{4\pi} E_1\left(\frac{r^2}{4(t-t_0)}\right) + C_1 \ln\left(\frac{r^2}{4(t-t_0)}\right) + C_2$, $E_1(\cdot)$ 是指数积分函数^[5], $C_1 = -\frac{1}{4\pi}$, $C_2 = -\frac{\gamma}{4\pi}$, Euler's 常数 $\gamma = 0.57721\ 56649$ ^[5].

注意到 $\log r$ 是调谐的, ϕ 遵从方程(2), 用 Green 第 2 公式即得

$$\begin{aligned} \alpha_i(p_i)\phi(p_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n}(\log r) - \log r \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} [\omega \log r] dA. \end{aligned} \quad (5)$$

我们将偏微分方程组(1)、(2)转化为积分方程组(4)、(5), 方程组(4)、(5)是时间、空间的含非齐次项 $\iint_D [\omega \log r] dA$ 的边界积分方程, 变量有 $\omega, \omega' (= \frac{\partial \omega}{\partial n}), \phi, \phi' (= -\frac{\partial \phi}{\partial n})$. 在空间区域边界上取 N 个节点, 将空间区域闭边界分为 N 段: $q_i \rightarrow q_{i+1}$ 为第 i 段, 取每段中点为 p_i 点, 在每段中, 认为 $\omega, \omega', \phi, \phi'$ 为常数. 同时将区域内部划分为相应的单元小块 ΔQ_a , 在每单元小块 ΔQ_a 上, 认为 ω 是常数(图 2a). 在时间坐标上取一系列等距离间隔: $t_m = t_0 + m\Delta t, m = 1, 2, \dots, M, \dots$ 在每段时间上, 认为 ω, ω' 是常数(图 2b).

根据上述基本思想, 我们得到(4)、(5)的离散化后的代数方程组

$$\begin{aligned} & [\alpha_i \delta_{ij} + B_{ij}^M][\omega_j^M] - [A_{ij}^M][\omega_j^M] \\ & = [b_{0i}^M] + \sum_{m=1}^{M-1} \{ [A_{ij}^m][\omega_j^m] - [B_{ij}^m][\omega_j^m] \}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$[\alpha_i \delta_{ij} - C_{ij}][\phi_j^M] + [D_{ij}][\phi_j^M] + [F_{ij}(\omega^M)] = 0, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \\ A_{ij}^m &= \int_{t_0+(m-1)\Delta t}^{t_0+m\Delta t} G_{ij}^m dt', \\ B_{ij}^m &= \int_{t_0+(m-1)\Delta t}^{t_0+m\Delta t} G_{ij}^{m'} dt', \\ b_{0i}^M &= \omega_{0i} G_{ii}^M - \omega_{0i}' G_{ii}^{M'}, \\ C_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{\partial(\log r_{ij})}{\partial n_j} dq_j, \\ D_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{q_i}^{q_{i+1}} \log r_{ij} dq_j, \\ F_{ij}(\omega^M) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_a \omega_a^M \iint_{\Delta Q_{ja}} \log(r_{ia}) dA_a. \end{aligned}$$

三、算 例

我们用本方法计算充满粘性液体的文杜里二维毛细管道中长气泡分裂(snap-off)过程. 计算的管道几何尺寸取自文献[1], $R_T = 0.05\text{cm}$, $\gamma_0 = 0.3$, $L/R_T = 16$. 粘性液体为水-甘油溶液, 粘性系数 $\mu = 8.5\text{mpa} \cdot \text{s}$, 气液交面表面张力 $\sigma = 68\text{mN/m}$.

对于这典型的非定常自由面问题, 气泡的形状是解的一部分, 它需要用非线性迭代得到, 这里我们应用了文献[2,3]的松弛迭代法. 在每次迭代中, “非齐次”项包含了区域内的未知量 ω_a^M , 这里我们用简单迭代法计算.

我们计算了 $C_a = 10^{-2}$, $C_a = 5 \times 10^{-3}$, $C_a = 10^{-4}$, $C_a = 5 \times 10^{-5}$ 四种情况, 将计算的主要结果——气泡分裂时间(time to snap-off)整理为无量纲分裂时间 $\tau = \frac{t}{(\mu R_T / \sigma)}$.

并与实验结果和一元分析结果比较, 见图 3.

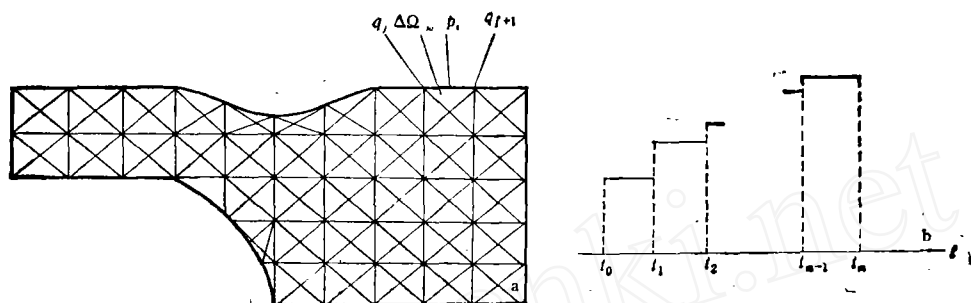


图 2

a. 空间网格节点分布; b. 常变量时间单元

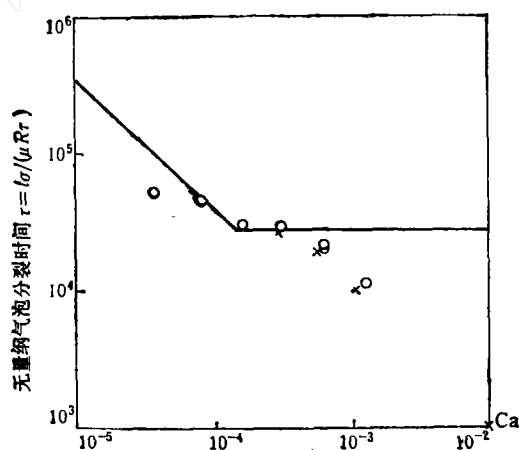


图 3 无量纲气泡分裂时间与 Ca 关系图

——为文献[1]的估算结果; \circ 为实验结果; \times 为本文结果

四、讨论与结论

文献[1]的一元简化分析,本质上是忽略了液膜的厚度,仅分析在管道拐角处的沉积液体对气泡分裂的影响。在一宽阔的 Ca 区域,液膜客观存在,特别是在较高的 Ca 区域,液膜对气泡分裂起支配作用,这时气泡形状受 Ca 影响大,气泡的分裂时间也是 Ca 的敏感的函数。这是文献[1]的一元简化分析方法,在这类区域结果与实验结果偏差较大的原因。

本文提出的 $\omega-\psi$ 非定常边界元方法还不是三元的方法,但已经抓住了分析这类问题的主要因素,即液膜对气泡分裂的影响。因此,在 Ca 较大的区域,我们的结果是可跟实验比较的。

参 考 文 献

- [1] Ransohoff, T. C., Gauglitz, P. A., Radke, C. J., *AIChE Journal*, 33(1987), 5: 753—765.
- [2] Lu Wen-qiang, Chang Hsueh-chia, *Proceedings of the International Symposium on Multiphase Flow*, Hangzhou, China, 1987, 408—415.
- [3] Lu Wen-qiang, Chang Hsueh-chia, *Journal of Computational Physics*, 77(1988), 340—360.
- [4] Pina, H. L. G., Fernandes, J. L. M., in *Topics in Boundary Elements Research*, v. 1, Basic Principles and Applications (ed. Brebbia, C. A.), Springer-Verlag, 1984, 41—58.
- [5] Abramowitz, M., Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1968.